Forum Unterrichtspraxis, Freitag, 19.3.2010, Halle 9, Stand E31, 12:00 bis 13:00 Uhr
Heinz Böer, Ricarda-Huch-Gymnasium, Gelsenkirchen; MUED, Appelhülsen

Stochastisches Wissen für den Alltag

Anhand von Zeitungsartikeln wird gezeigt, welche mathematischen Kompetenzen interessierte Bürger/innen und Schüler/innen haben sollten, um Alltagsnachrichten kritisch prüfen und angemessen beurteilen zu können.

Vortragsabfolge

1. Grafische Darstellungen und Deutungen

- ***Umverteilung***: achte auf Achseneinteilungen – Steigungen berechnen; Vorsicht bei relativen Daten – absolute prüfen; Vorsicht mit Folgerungen aus berechneten Zahlen im psycho-sozialen Umfeld
- ***Jobs und Wachstum***: Prüfe "griffige" Überschriften – mehrjährige Wachstumsraten berechnen
- ***Kindergeld***: Nullpunktunterdrückung als Manipulationsinstrument, dreidimensionale Darstellungen prüfen – die 3. Wurzel als Längenfaktor
- ***Kostbares Nass***: siehe Kindergeld
- ***PISA***: Lesen und Deuten statistischer korrekter Darstellungen

Umverteilung:

1) Die obere Grafik scheint im "letzten Stück" weniger stark zu steigen als vorher. Die untere Grafik scheint dort weniger stark zu fallen.

a) Tipp: Prüfe die jeweils durchschnittliche Änderung pro Jahr. Formuliere für beide Grafiken den Satz oben richtig.

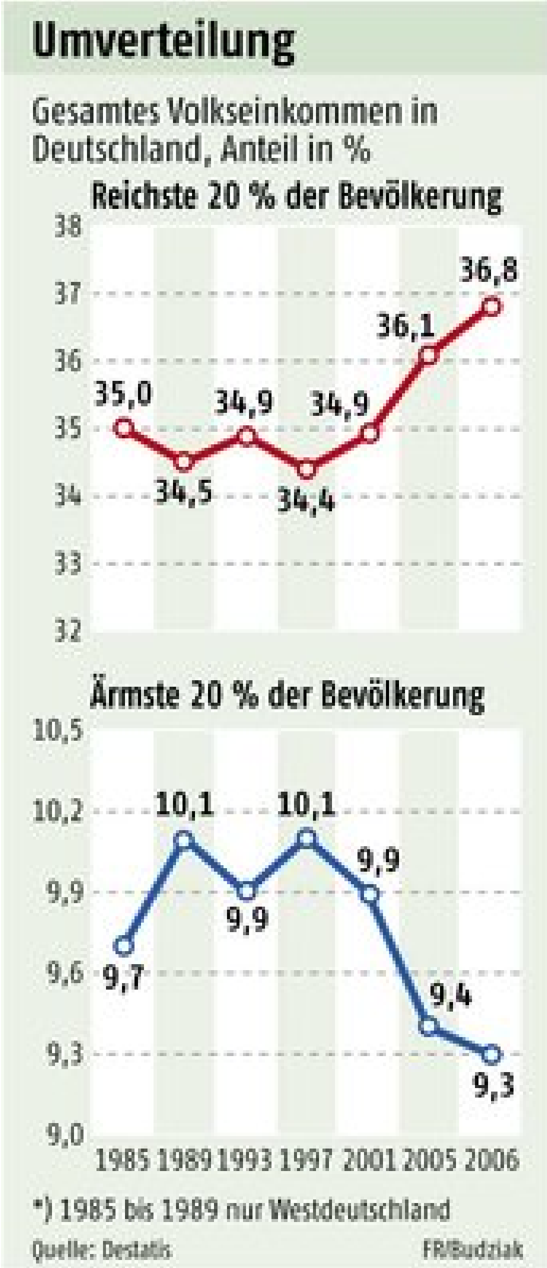
b) Formuliere eine Regel für gute Grafiken, die sich aus dem gemachten Fehler ergibt.

2) Die Zahlen in Mrd. Euro für das Volkseinkommen stehen unten in der Tabelle.

a) Hatten die 20 % Ärmsten tatsächlich weniger Geld zur Verfügung seit 2001?

b) Erläutere den scheinbaren Widerspruch zu den Grafiken.

Mögliche Zusätze siehe unten.



aus: Frankfurter Rundschau, 15.9.2009

1993	1997	1998	2001	2005	2006
1 694,37	1 915,58	1 965,38	2 113,16	2 242,20	2 325,10

Statistisches Bundesamt

1. a) Reichste 20 % der Bevölkerung: $\frac{36{,}1-34{,}9}{2005-2001} = 0{,}3$

   Ärmste 20 % der Bevölkerung: $\frac{9{,}4-9{,}9}{4} = -0{,}125$

   In den 4 Jahren von 2001 bis 2005 haben die reichsten 20 % der Bevölkerung ihren Anteil am Volkseinkommen um durchschnittlich 0,3 Prozentpunkte pro Jahr gesteigert, die ärmsten 20 % fielen dagegen um $\frac{1}{8}$ Prozentpunkt pro Jahr ab.
   Von 2005 auf 2006 nahm der Anteil am Volkseinkommen für die 20 % Reichsten um 0,7 Prozentpunkte zu, der Anteil der 20 % Ärmsten fiel um 0,1 Prozentpunkte.
   In der oberen Kurve sieht es so aus, als ob die Zunahme schwächer wird, dagegen nimmt sie von 0,3 auf 0,7 pro Jahr zu.
   In der unteren Kurve scheint sich die Abnahme deutlich zu verlangsamen. Sie wird aber nur geringfügig kleiner von 0,125 auf 0,1.

   b) Die x-Achse (hier Zeitachse) muss äquidistant eingeteilt werden; sonst werden Steigungsvergleiche falsch.

2. a) 2001: 9,9 % · 2113,2 Mrd. € ≈ 209,2 Mrd. €
   2005: 9,4 % · 2242,2 Mrd. € ≈ 210,8 Mrd. €
   2006: 9,3 % · 2325,1 Mrd. € ≈ 216,2 Mrd. €
   Tatsächlich ist die zur Verfügung stehende Geldmenge für die 20 % Ärmsten von 2001 bis 2006 gestiegen, obwohl ihr Anteil von 9,9 % auf 9,3 % gefallen ist.

   b) Das Volkseinkommen hat zugenommen. Der Anstieg war so groß, dass er den abnehmenden Anteil mehr als ausgeglichen hat.

   c) Zusatz I: Vergleich der absoluten Zunahmen von 1997 bis 2006

   $\frac{0{,}368 \cdot 2325{,}1\,\text{Mrd €}}{0{,}344 \cdot 1915{,}58\,\text{Mrd €}} \approx \frac{855{,}6\,\text{Mrd. €}}{659{,}0\,\text{Mrd. €}} \approx$ 1,298 entspricht rund + 30 %

   $\frac{0{,}093 \cdot 2325{,}1\,\text{Mrd €}}{0{,}101 \cdot 1915{,}58\,\text{Mrd €}} \approx \frac{216{,}2\,\text{Mrd. €}}{193{,}5\,\text{Mrd. €}} \approx \approx$ 1,117 entspricht rund + 12%

   Das Einkommen der Reichen ist um rund 30% gestiegen von 1997 bis 2006, das der Armen nur um rund 12%.

   d) Zusatz II: Entwicklung des Verhältnisses von 1997 bis 2006

   $\frac{34{,}4}{10{,}1} \approx 3{,}4$ und $\frac{36{,}8}{9{,}3} \approx 4{,}0$

   Die 20 % Reichsten hatten 1997 das 3,4-fache zur Verfügung, 2006 rund das 4-fache des BIP-Anteils der 20 % Ärmsten.

Als Hintergrund zum Ergebnis zu Nr. 2a, b:

Ungleichheit macht krank

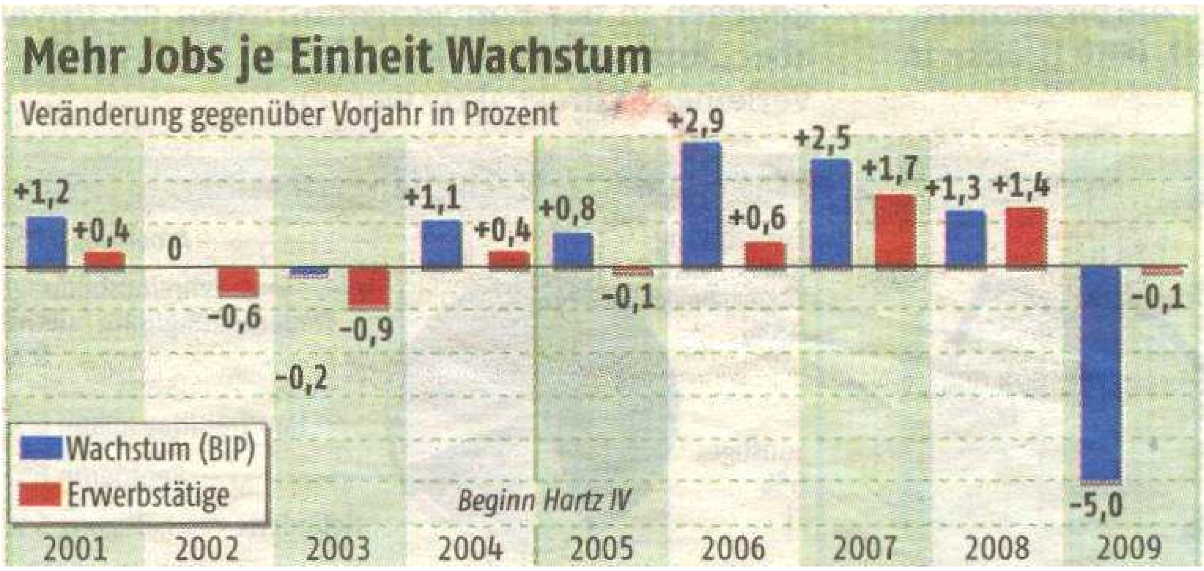
"Manches, was man heute als Armut beklagt, wäre in meiner Kindheit beinahe kleinbürgerlicher Wohlstand gewesen." Viele denken wie der ehemalige Bundeskanzler Helmut Schmidt, der immer wieder betont, dass es den Unterprivilegierten hierzulande so schlecht nicht gehen könne, schließlich besäßen fast alle einen Fernseher, Videorecorder oder ein Auto - Dinge, die noch in den 70er Jahren für viele Facharbeiter unerreichbar waren. Falsch, sagen Richard Wilkinson und Kate Pickett, zwei englische Epidemiologen, deren Buch "Gleichheit ist Glück" gerade auf Deutsch erschienen ist. Zumindest in den entwickelten Ländern sei das Schlimme an der Armut nicht Mangel, sondern Kränkung.

Wilkinson und Pickett untersuchen seit Jahren, welche Faktoren das Wohlergehen der Menschen bestimmen. Sie sind überzeugt, dass Gesundheit und Lebenserwartung in einer Gesellschaft unmittelbar davon abhängen, wie gleichmäßig der Reichtum verteilt ist. **Ungleichheit dagegen "führt zu geringerer Lebenserwartung, zu geringerem Geburtsgewicht und höherer Säuglingssterblichkeit. Die Menschen erreichen eine geringere Körpergröße, sie sind anfälliger für Infektionskrankheiten und Depressionen".** Es kommt demnach gar nicht so sehr darauf an, ob jemand über einen Fernseher verfügt oder nicht. Wichtig ist, ob die anderen einen haben. In den USA verfügen 80 Prozent der nach offizieller Definition Armen über eine Klimaanlage, 75 Prozent über ein Auto und 33 Prozent über Computer, Zweitwagen oder Geschirrspülmaschine. Dennoch leiden sie häufiger unter Krankheiten als Menschen mit dem gleichen Konsumniveau in anderen Gesellschaften. Wilkinson und Pickett zeigen, dass derselbe Lebensstandard unterschiedliche Folgen hat - je nachdem, wie hoch der Lebensstandard der anderen ist.

Der wichtigste Grund dafür ist der "sozialen Psychosomatik" von Wilkinson und Pickett zufolge, dass Ungleichheit chronischen Stress erzeugt. Besonders die vermehrte Ausschüttung des Hormons Cortisol führe in den entwickelten Ländern zu Herz-Kreislauf-Erkrankungen, Schlaganfällen und Fettleibigkeit.

Frankfurter Rundschau, 27.2.2010

Jobs und Wachstum:



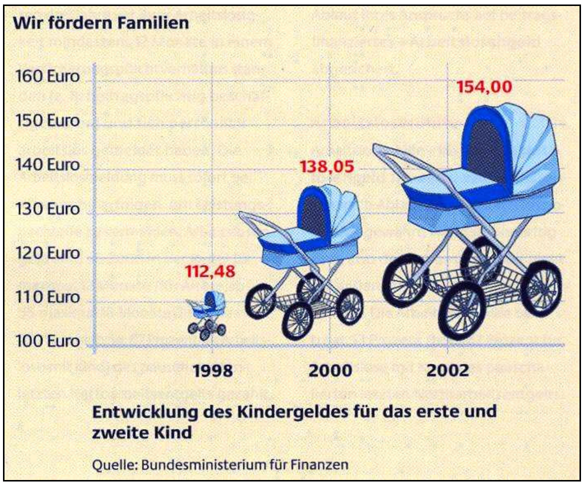
Frankfurter Rundschau, 6.2.2010

1. $1{,}012 \cdot 1 \cdot 0{,}998 \cdot 1{,}011 \cdot 1{,}008 \cdot 1{,}029 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}013 \cdot 0{,}95 \approx 1{,}0447 \approx 1{,}045$
   Das Bruttoinlandsprodukt nimmt von 2001 bis 2009 insgesamt um 4,5 % zu.
2. $1{,}004 \cdot 0{,}994 \cdot 0{,}991 \cdot 1{,}004 \cdot 0{,}999 \cdot 1{,}006 \cdot 1{,}017 \cdot 1{,}014 \cdot 0{,}999 \approx 1{,}02805 \approx 1{,}028$
   Die Zahl der Erwerbstätigen nimmt von 2001 bis 2009 insgesamt um 2,8 % zu.

3. Das BIP hat stärker zugenommen als die Erwerbstätigenzahl. Die Überschrift müsste umgekehrt lauten: Mehr Wachstum pro Erwerbstätigen; richtiger: BIP wächst stärker als Beschäftigtenzahl; oder: Mehr Wertschöpfung pro Beschäftigtem.

Kindergeld:

So?



Oder so?

Zur tatsächlichen Wahrnehmung:
Testserien haben ergeben: Wir ordnen Volumendiagrammen, die doppeltes Volumen darstellen, im Durchschnitt das 1,3- bis 1,5-fache des Volumens statt das 2-fache zu, und das 4- bis 6-fache, wenn das 8-fache Volumen dargestellt ist.

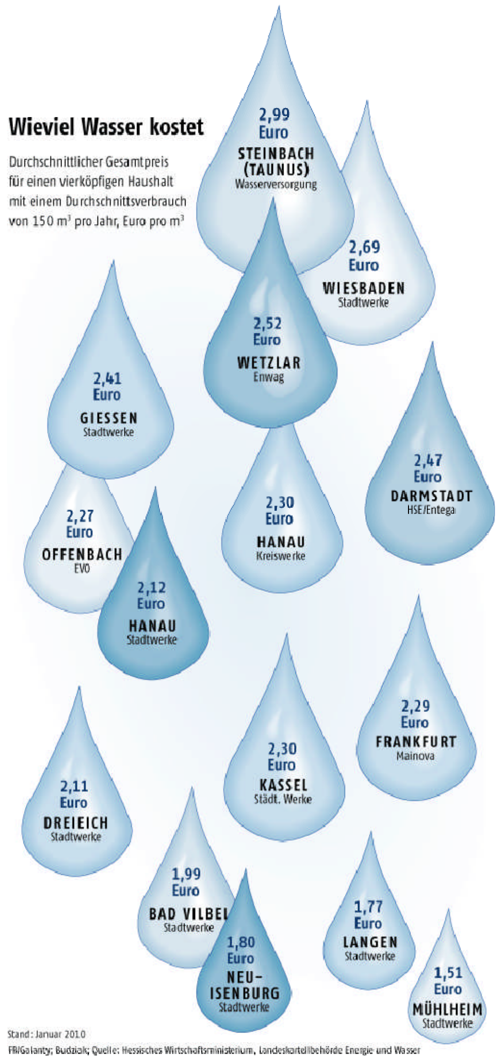
(nach W. Krämer, Statistik verstehen, Campus-Verlag 1999)

Kostbares Nass:

1. Was zahlt die Beispielfamilie pro Jahr in
a) Steinbach
b) Hanau (Stadtwerke)
c) Langen?

2.
a) Um wie viel Prozent ist der teuerste Preis höher als der billigste?
b) Um wie viel Prozent weichen 1. b) und c) vom Mühlheim-Preis ab?

3. Zur Darstellung
a) Ermittle an Beispielen, wie der Preiszunahmefaktor gegenüber Mühlheim mit den Tropfendarstellungen zusammenhängt.
b) Tatsächlich sind Tropfen, also Volumina dargestellt. Berechne, wie die Längenänderungsfaktoren dafür aussehen müssten.
c) Wähle die Beispiele aus 1. bzw. 2. b) und stelle die Tropfen richtig dar.



Frankfurter Rundschau, 03.02.2010

1. a) Steinbach: 2,99 € · 150 = 448,50 €
b) Hanau: 2,12 € · 150 = 318 €
c) Langen: 1,77 € · 150 = 265,50 €
Die Familie zahlt in Steinbach 448,50 € jährlich, in Hanau 318 €, in Langen 265,50 €.

2. a) $\frac{2{,}99\text{ €}}{1{,}51\text{ €}} \approx 1{,}98$

Der Preis in Steinbach liegt knapp doppelt so hoch wie der in Mühlheim; genauer 98 % darüber.

b) Hanau: $\frac{2{,}12\text{ €}}{1{,}51\text{ €}} \approx 1{,}40$, also + 40 %

Langen: $\frac{1{,}77\text{ €}}{1{,}51\text{ €}} \approx 1{,}17$, also + 17 %

Der Wasserpreis in Hanau liegt etwa 40 % höher als der in Mühlheim, der in Langen rund 17 % höher.

3. a) Mühlheims Wassertropfenhöhe: rund 3 cm

Steinbach: rund 6 cm, also etwa 100 % größer, denn $\frac{6\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 200\ \%$.

Langen: rund 3,5 cm, also etwa 17 % größer, denn $\frac{3{,}5\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 117\ \%$.

Hanau: rund 4,2 cm, also etwa 40 % größer, denn $\frac{4{,}2\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 140\ \%$.

Der Preis ist proportional zur Tropfenlänge dargestellt.

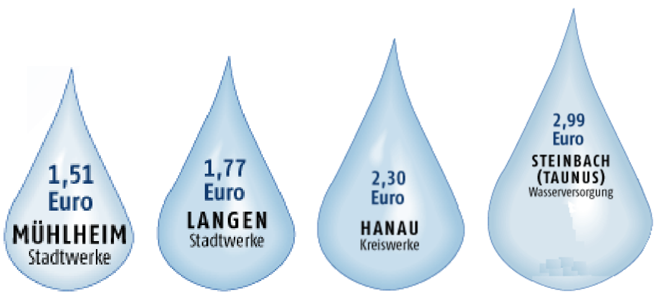
b) Steinbach: $\sqrt[3]{\frac{2{,}99}{1{,}51}} \approx 1{,}26$

Hanau: $\sqrt[3]{\frac{2{,}12}{1{,}51}} \approx 1{,}12$

Langen: $\sqrt[3]{\frac{1{,}77}{1{,}51}} \approx 1{,}05$

Länge, Breite und Tiefe des Tropfens müssten für Steinbach rund 26 % größer sein als für Mühlheim, also müsste die Länge 3 cm · 1,26 ≈ 3,8 cm betragen statt 6 cm!
Hanau: 3 cm · 1,12 ≈ 3,4 cm Tropfenlänge
Langen: 3 cm · 1,05 ≈ 3,15 Tropfenlänge

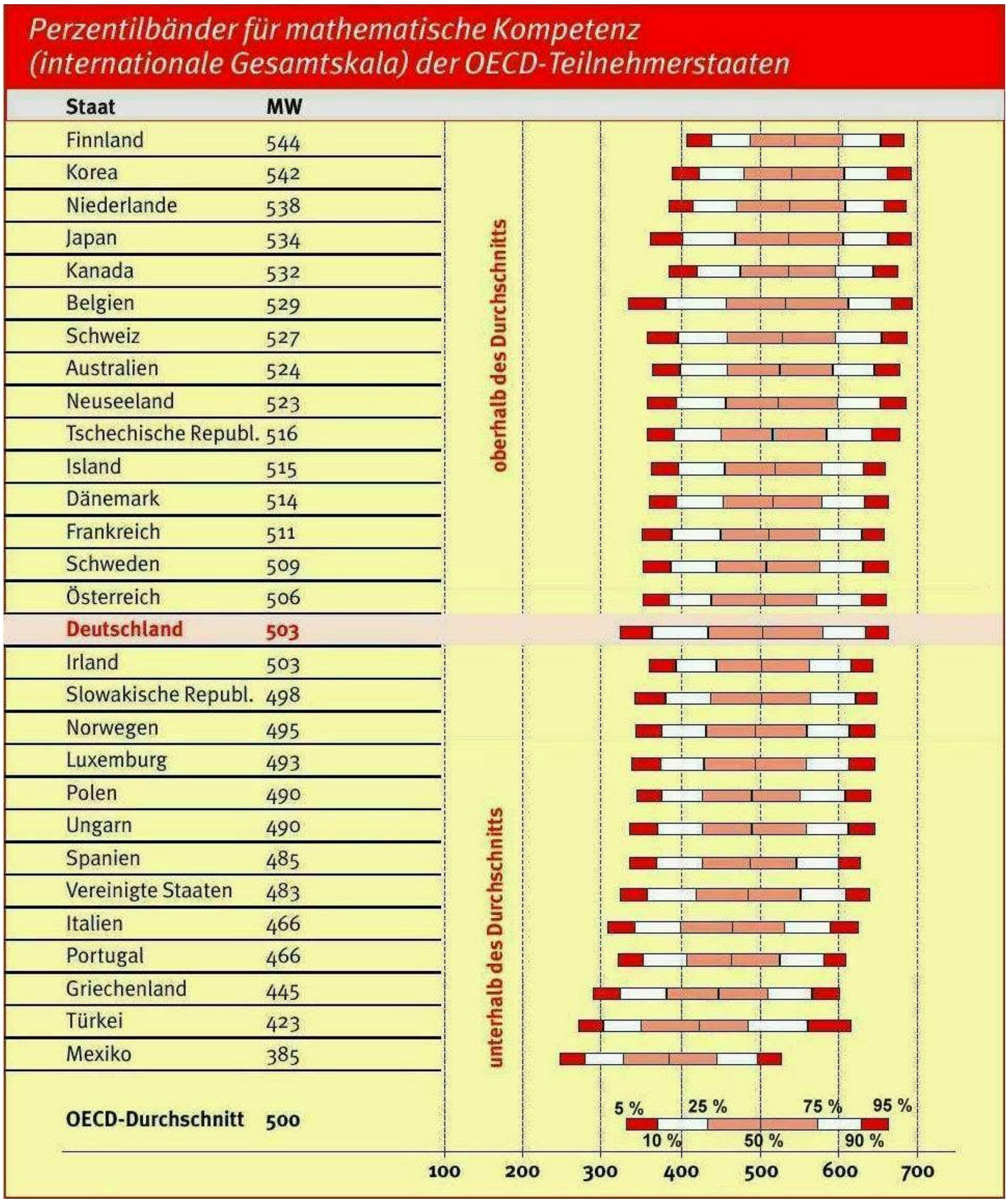
c)



PISA:

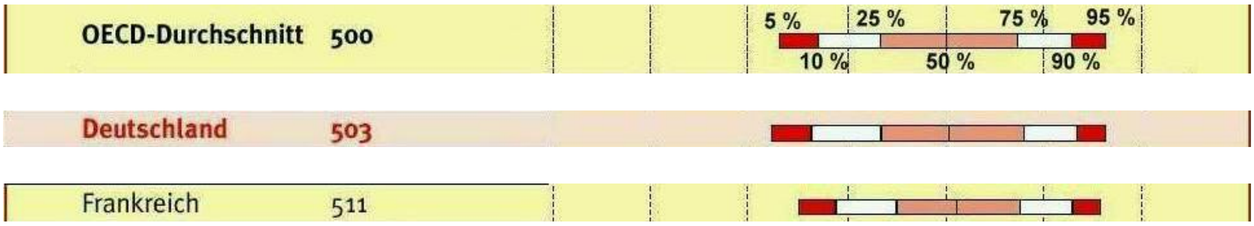
PISA-Studie II: mathematische Kompetenz

Ergebnisse veröffentlicht im Dezember 2004
nach: GEW Erziehung und Wissenschaft: Zeitschrift der Bildungsgewerkschaft
GEW 1/2005



a) Skizziere für Deutschland und den OECD-Durchschnitt nebeneinander Boxplots und bewerte das BRD-PISA-Ergebnis (lasse noch Platz für b).
b) Skizziere das Boxplot für Frankreich neben das der BRD und vergleiche.
c) Nach welchem Kriterium sind die Staaten bei den PISA-Ergebnissen geordnet?
d) Notiere andere Kriterien und sortiere die ersten und letzten drei Staaten neu. Würde sich der Platz für Deutschland verbessern oder verschlechtern?
e) Wenn der Abstand zwischen 50 %- und 5 %-Wert groß ist, so spricht das gegen das Bildungssystem. Erläutere das. Welche wären die ersten drei, welche die letzten drei Staaten nach diesem Kriterium?

Mathematische Kompetenzen



a) Deutschland liegt einigermaßen genau im OECD-Durchschnitt, sowohl im Mittelwert als auch in den Schwankungsbreiten.

b) Deutschland liegt in den Spitzenwerten leicht über (95 %-Perzentil), sonst (90 %-, 75 %-Perzentil) ähnlich wie Frankreich, liegt aber im Mittelwert und besonders den unteren Perzentilwerten (25 %, 10 %, 5 %) deutlich tiefer. Es gibt etwa so viele gute Ergebnisse wie in Frankreich, aber die schlechten Ergebnisse liegen deutlich tiefer.

c) Die Ergebnisse sind nur nach dem Mittelwert sortiert, der auch vorne hinter den Staatennamen steht (MW).

d) Sortiert man nach den höchsten 95 %-Werten ("Welche Staaten liefern die besten Ergebnisse?"), so beginnt die Abfolge mit Belgien, Korea und Japan und endet mit Portugal, Griechenland und Mexiko.
Deutschland würde nach oben rutschen, läge mit Dänemark und Schweden gleichauf vor Österreich, Frankreich und Irland.
Sortiert man nach den 5 %-Werten ("In welchen Staaten sind die schlechtesten Ergebnisse noch einigermaßen in Ordnung?"), so liegen Finnland, Korea, Niederlande und Kanada vorne, Griechenland, Türkei und Mexiko am Ende.
Deutschland würde seinen Platz deutlich verschlechtern bis zu den Vereinigten Staaten.

e) Wenn es große Abstände zwischen dem Mittelwert und dem 5 %-Wert gibt, so sind die schlechten Ergebnisse "wirklich" schlecht im Vergleich zum Mittelwert.
Das heißt: In dem Land werden schlecht abschneidende Schüler/innen vergleichsweise nicht besonders gefördert, sondern eher vernachlässigt.
Nach diesem Kriterium liegen Finnland, Mexiko (!) und Portugal auf den ersten drei Plätzen; Belgien, Deutschland und Japan liegen auf den letzen drei Plätzen.

2. Lotto

- ***Die 13 ist dran***: Problematisierung von Alltagsvorstellungen
- ***Wk für die 13***: Baumdiagramm für mehrstufige Zufallsprozesse
- ***Mathe-live***: Wk durch relative Häufigkeiten deuten; Wk durch relative Häufigkeiten schätzen
  Absolute Abweichungen vom erwarteten Wert können im Einklang mit dem Gesetz der Großen Zahl zunehmen
- ***Lotto-Wken***: Verlust-Wk einschätzen
- ***Verteilung von oben nach unten***: Hintergrund zur Gewinnausschüttung, Anteile und "Erwartungswert"

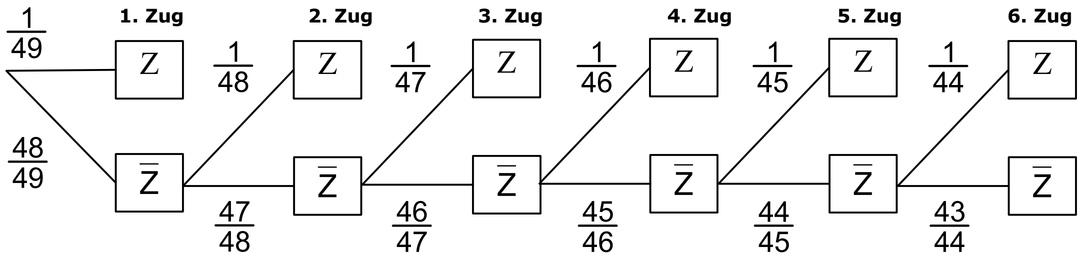
Die 13 ist dran:

Die 13 ist dran!

Frankfurter Rundschau, 22.06.2001

Wk für die 13

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl gezogen wird (Z) bzw. nicht gezogen wird ($\overline{Z}$), beträgt beim Lotto:



P (Zahl Z wird in einem der 6 Züge gezogen) =

$$\frac{1}{49}+\frac{48\cdot 1}{49\cdot 48}+\frac{47\cdot 47\cdot 1}{49\cdot 48\cdot 47}+\ldots+\frac{48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44\cdot 1}{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}=\frac{6}{49}$$

Mathe-live

1) Zur Deutung der Wahrscheinlichkeit

Klaus spielt mit seiner Zwillingssschwester Silke ‘Mensch ärgere dich nicht’ und verliert haushoch. Da beide mit einem eigenen Würfel geworfen haben, vermutet Klaus, dass Silkes Würfel manipuliert war und deshalb so häufig die 6 kam. Er prüft den Würfel in einer Testserie:

Zahl der Würfe	10	100	500	1000	5000	10 000

a) Nach 10 Würfen springt er auf und will Silke der Würfelmanipulation beschuldigen. Ist das in Ordnung?
b) Nach 100 Würfen will er schon aufhören. Wieso? Was rätst du?
c) Schätze selber die Wahrscheinlichkeit nach 500 Würfen. Ist der Würfel okay?
d) Nach 1000, 5000 und 10 000 Würfen zeichnet sich die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis 6 ab. Schätze sie.
e) Dein Kommentar zum Würfel bitte.

2) Absolute Daten und das Gesetz der Großen Zahl

Bei 6000 Würfen mit dem Würfel erwartet man in etwa 1000-mal eine 6, da dann die relative Häufigkeit genau zur Wahrscheinlichkeit passt.
Es kommen in einer Versuchsserie

Würfe	600	6000	12 000
6en	114	1020	2025

a) Wie viele 6en erwartest du in den drei Fällen?
b) Wie groß ist die absolute Abweichung von deiner Erwartung?
c) Passen die Daten trotzdem zum Gesetz der Großen Zahl?

Bearbeitung

1)

Zahl der Würfe	10	100	500	1000	5000	10 000
relative Häufigkeit für die 6	30 %	10 %	16 %	19 %	19,1 %	18,95 %

a) Die relative Häufigkeit liegt deutlich über 1/6. Der Würfel liefert – wie es scheint – zu viele Sechsen. Aber bei so wenigen Versuchen ist noch keine brauchbare Aussage über die Wahrscheinlichkeit möglich.
b) Die relative Häufigkeit liegt mit 10 % unter 1/6. Der Würfel scheint weniger 6en zu liefern. Aber … siehe a).
c) Mit 16 % relativer Häufigkeit liegt das Würfelergebnis nahe bei 1/6. Der Würfel scheint okay zu sein. Aber noch liegen zu wenige Würfe für eine ernsthafte Prognose der Wahrscheinlichkeit vor.
d) Die Wahrscheinlichkeit für eine 6 liegt bei etwa 19 %.
e) Der Würfel ist tatsächlich gezinkt.

2)

	Würfe	600	6000	12 000
	6en	114	1020	2025
a)	erwartete 6en	100	1000	2000
	Abweichung	14	20	25
b)	relative Häufigkeit	19,0 %	17,0 %	16,9 %
	Abweichung von der Wahrscheinlichkeit	2,3 %	0,3 %	0,2 %

a) Die absoluten Abweichungen nehmen zu.
b) Da der Abstand der relativen Häufigkeit zur Wahrscheinlichkeit abnimmt, passen die Daten trotzdem zum Gesetz der großen Zahl. Das macht nur Angaben zur relativen Häufigkeit.

(mathe live, Band 7)

Lotto-Wken

A) Lotto-Gewinnklassen I bis VIII

I: $P(\text{6 Richtige + Superzahl}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{139\,838\,160} \approx 7{,}15 \cdot 10^{-9}$

Es gibt nur eine günstige Möglichkeit. $\binom{49}{6}$ verschiedene Möglichkeiten gibt es einen Lottoschein auszufüllen, 10 verschiedene gibt es für die Superzahl.

II: $P(\text{6 Richtige}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} \cdot \frac{9}{10} \approx \frac{1}{15\,537\,573} \approx 6{,}44 \cdot 10^{-8}$

Die Wahrscheinlichkeit, die Superzahl nicht zu treffen, beträgt $\frac{9}{10}$.

III: $P(\text{5 Richtige + Zusatzzahl}) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} \cdot \frac{1}{43} = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{49}{6}} \cdot 1 = \frac{1}{2\,330\,363} \approx 4{,}29 \cdot 10^{-7}$

Interpretation a) Berechnung und Multiplikation der beiden Wahrscheinlichkeiten. Die 5 Richtigen stammen aus den 6 gezogenen Zahlen: $\binom{6}{5}$ Möglichkeiten. Die eine "falsche" Zahl stammt aus den 43 nicht gezogenen: $\binom{43}{1}$ Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass die eine die Zusatzzahl ist, beträgt $\frac{1}{43}$.

Interpretation b) Berechnung der Zahl aller günstigen Fälle: Für die 5 Richtigen gibt es $\binom{6}{5}$ Möglichkeiten (s. a). Für die 6. Kugel gibt es nur 1 Möglichkeit: es ist die Zusatzzahl.

IV: $P(5\text{ Richtige}) = \dfrac{\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}\cdot\dfrac{42}{43} = \dfrac{\binom{6}{5}}{\binom{49}{6}}\cdot 42 = \dfrac{1}{55\,491} \approx 1{,}80\cdot 10^{-5}$

Interpretation a) Die Erläuterung des erstens Bruches s. III a). Die Wahrscheinlichkeit, die Zusatzzahl nicht zu treffen, beträgt $\frac{42}{43}$.

Interpretation b) Der erste Bruch ist in III b erläutert. Zudem gibt es 42 Möglichkeiten, neben den 5 Richtigen die Zusatzzahl nicht zu treffen.

V: $P(4\text{ R. + Zusatzzahl}) = \dfrac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}\cdot\left(\dfrac{1}{43}\cdot 1+\dfrac{42}{43}\cdot\dfrac{1}{42}\right) = \dfrac{\binom{6}{4}}{\binom{49}{6}}\cdot 42 = \dfrac{1}{22\,197} \approx 4{,}51\cdot 10^{-5}$

Interpretation a) Der erste Bruch gibt die Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige aus 49 an. Die Wahrscheinlichkeit, mit einer der beiden restlichen Zahlen die Zusatzzahl zu treffen, beträgt für die erste $\frac{1}{43}$. Die 2. Zahl trifft die Zusatzzahl, wenn die erste sie nicht trifft $\left(\frac{42}{43}\right)$, sie selber aber doch $\left(\frac{1}{42}\right)$.

Interpretation b) Für 4 Richtige gibt es $\binom{6}{4}$ günstige Fälle. Mit einer der beiden übrigen Zahlen muss die Zusatzzahl getroffen werden, für die andere bleiben dann noch 42 Möglichkeiten.

VI: $P(4\text{ Richtige}) = \dfrac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}\cdot\dfrac{42}{43}\cdot\dfrac{41}{42} = \dfrac{\binom{6}{4}}{\binom{49}{6}}\cdot\dfrac{42\cdot 41}{2} = \dfrac{1}{1083} \approx 9{,}24\cdot 10^{-4}$

Interpretation a) Die Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige aus 49 wird mit der Wahrscheinlichkeit für keine Zusatzzahl multipliziert: $\frac{42}{43}$ für die eine, $\frac{41}{42}$ für die zweite "falsche" Zahl.

Interpretation b) Für die 4 Richtigen gibt es $\binom{6}{4}$ Fälle. Für die 5. Zahl gibt es 42 (sie darf nicht zu den 6 Richtigen gehören und nicht die Zusatzzahl sein) Möglichkeiten, für die 6. noch 41. Da diese Zählung die Reihenfolge berücksichtigt, muss noch durch 2 dividiert werden, denn jedes Zahlenpaar wurde rückwärts und vorwärts, also zweifach gezählt.

VII: $P(3\text{ Richtige + Zusatzzahl}) = \dfrac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}\cdot\left(\dfrac{1}{43}+\dfrac{42}{43}\cdot\dfrac{1}{42}+\dfrac{42}{43}\cdot\dfrac{41}{42}\cdot\dfrac{1}{41}\right) = \dfrac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}\cdot\dfrac{3}{43} =$

$$\dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{49}{6}}\cdot\dfrac{42\cdot 41}{2} \approx \dfrac{1}{812} \approx 1{,}23\cdot 10^{-3}$$

Interpretation a) Die Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige und 3 Falsche aus 49 (der erste Bruch) wird multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, die Zusatzzahl mit einer der nicht Richtigen zu treffen.

- Die erste trifft: $\frac{1}{43}$
- Sie trifft nicht $\left(\frac{42}{43}\right)$, aber die zweite trifft $\left(\frac{42}{43}\cdot\frac{1}{42}\right)$
- Beide treffen nicht die Zusatzzahl, aber die dritte: $\frac{42}{43}\cdot\frac{41}{42}\cdot\frac{1}{41}$. Insgesamt: $\frac{3}{43}$.

Interpretation b) Die Anzahl der Möglichkeiten für 3 Richtige ist $\binom{6}{3}$. Eine der restlichen Zahl trifft die Zusatzzahl: Eine Möglichkeit. Für die beiden anderen Zahlen gibt es $\frac{42\cdot 41}{2}$ verschiedene Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge wie beim Lotto unwichtig ist.

VIII:P(3 Richtige) = $\frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}\cdot\frac{40}{43} = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{49}{6}}\cdot\frac{42\cdot 41\cdot 40}{3!} \approx \frac{1}{61} \approx 1{,}64\ \%$

Interpretation a) Die Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige und 3 Falsche (erster Bruch) wird multipliziert mit $\frac{42}{43}\cdot\frac{41}{42}\cdot\frac{40}{41} = \frac{40}{43}$, wobei die drei Brüche für die Wahrscheinlichkeit stehen, jeweils die Zusatzzahl nicht zu treffen.

Interpretation b) Es gibt $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten für 3 Richtige. Für die 3 Falschen gibt es 42 · 41 · 40 Möglichkeiten, die Zusatzzahl nicht zu treffen. Da die Reihenfolge unbeachtet bleibt, sind die 3!-fach-Ziehungen von 3 Zahlen heraus zu dividieren.

Summe: 1,862 % $\approx \frac{1}{54}$

Im Lotto gewinnt man überhaupt etwas mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 1:54.

B) Lotto-Verlierer

P(2 Richtige) = $\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{43}{4}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{7{,}6} \approx 13{,}2\ \%$

P(1 Richtig) = $\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{43}{5}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{2{,}4} \approx 41{,}3\ \%$

P(0 Richtig) = $\frac{\binom{6}{0}\cdot\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{2{,}3} \approx 43{,}6\ \%$

Summe: 98,1 % $\approx \frac{53}{54}$

Man gewinnt im langfristigen Mittel beim Lotto nichts in rund 53 von 54 Spielen.

Verteilung von oben nach unten

Lotto: Umverteilung von oben nach unten?

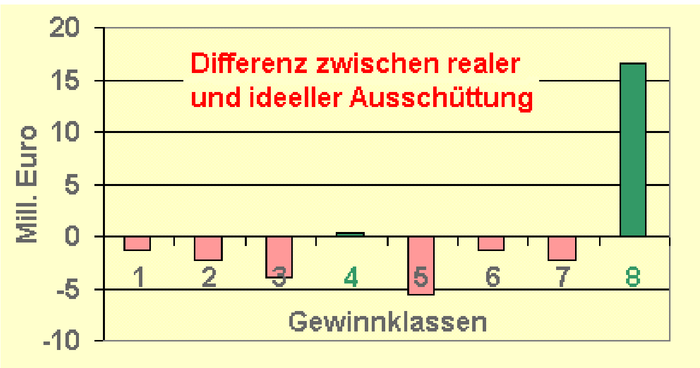
Ausschüttung und Quoten

Gewinn-klasse	Treff.**	% Aus-schütt.*	Ausschüttung Euro	Chance 1 : P	Gewinn-Kombinationen	theor.-reale Quote (EU)
1	6 + SZ	10	5.243.931,00	139.838.160	1	5.243.931,00
2	6	8	4.195.144,80	15.537.573	9	466.127,20
3	5 + ZZ	5	2.621.965,50	2.330.636	60	43.699,43
4	5	13	6.817.110,30	55.491	2.520	2.705,20
5	4 + ZZ	2	1.048.786,20	22.197	6.300	166,47
6	4	10	5.243.931,00	1.083	129.150	40,60
7	3 + ZZ	8	4.195.144,80	812	172.200	24,36
8	3	44	23.073.296,40	61	2.296.000	10,05
gesamt		100	52.439.310,00	54	2.606.240	mittel:20,12

* Die Ausschüttung beträgt nur 50 % der Einnahmen ** SZ: Superzahl, ZZ: Zusatzzahl

Ideelle Ausschüttung und Quote

GK	Treff.**	% Aus-schütt.*	ideelle(gleiche) Ausschütt. (EU)	"ideelle" Quote (EU)
1	6 + SZ	12,5	6.554.913,75	6.554.913,75
2	6	12,5	6.554.913,75	728.323,75
3	5 + ZZ	12,5	6.554.913,75	109.248,56
4	5	12,5	6.554.913,75	2.601,16
5	4 + ZZ	12,2	6.554.913,75	1.040,46
6	4	12,5	6.554.913,75	50,75
7	3 + ZZ	12,5	6.554.913,75	38,07
8	3	12,5	6.554.913,75	2,85
ges.		100	52.439.310,00	2.606.240



nach: http://www.tipptreffer.de/lotto/lottoumverteil.htm

3. Verkürzte statistische Daten strukturieren und erweitern

- ***Mädchen schneiden besser ab***: Strukturieren statistischer Daten durch Baumdiagramme (Vierfeldertafel); Erschließen implizit gegebener Informationen, um Daten zu vervollständigen; Erschließen neuer Zusammenhänge in den Daten; Umgang mit bedingten Wk
- ***Erwerbstätigkeit***: s.o.
- ***Ausländer***: s.o.

Mädchen schneiden besser ab

Mädchen schneiden besser ab I

1. Stelle die Daten des zweiten Artikelabschnittes übersichtlich in einem Baumdiagramm oder einer Vierfeldertafel mit Summenrand dar.

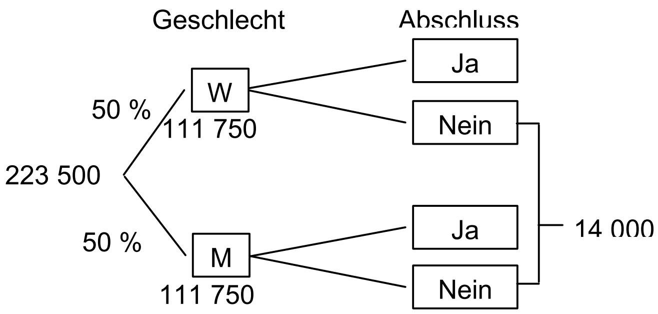
2. Vervollständige die Darstellung.

In Nordrhein-Westfalen haben im vergangenen Jahr deutlich mehr Mädchen die Schulen mit höheren Abschlüssen verlassen als Jungen. Die Mädchen stellten gut 56 Prozent aller Abiturienten und auch 54 Prozent aller Schüler mit Fachhochschulreife, teilte das Statistische Landesamt gestern in Düsseldorf mit.
Von den insgesamt knapp 223 500 Schülern, die im Sommer 2008 die Schule verließen, waren jeweils genau die Hälfte Mädchen und Jungen. Keinen Abschluss schafften gut 14 000 Schüler – rund 60 Prozent von ihnen waren Jungen.

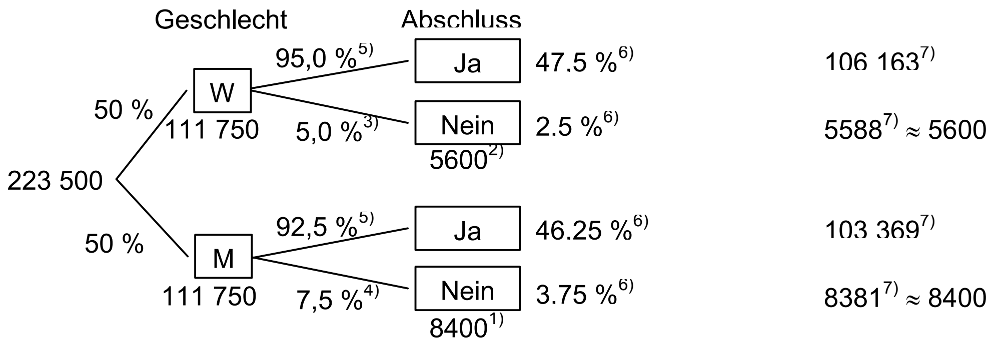
aus: Westfälische Nachrichten, 13.03.2009

LÖSUNGEN

1.



2.



1) 14 000 · 0,6 = 8400
2) 14 000 - 8400 = 5600 oder 14 000 · 0,4 = 5600
3) 5600 : 111 750 ≈ 0,050 = 5,0 %
4) 8400 : 111 750 ≈ 7,5 %
5) Ergibt sich als Ergänzung zu 100 % mit der benachbarten Astwahrscheinlichkeit.
6) Produkt der Prozentsätze längs der Pfade
7) 223 5000 · p %

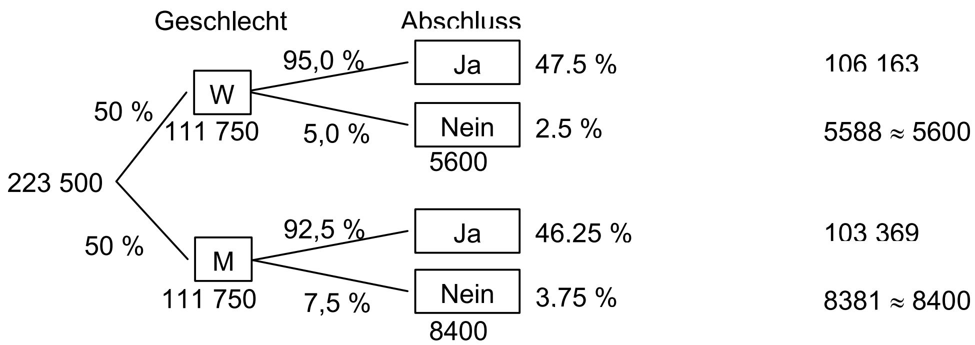
Vierfeldertafel
Die Daten ergeben sich aus dem Text.

	Jungen	Mädchen	Summe
Abschluss			
kein Abschluss	8 400	5 600	14 000
Summe	111 750	111 750	223 500

Vollständige Vierfeldertafel (mit Anteilen jeweils von 223 500)

	Jungen	Mädchen	Summe
Abschluss	103 350 46,24 %	106 150 47,5 %	209 500 93,74 %
kein Abschluss	8 400 3,76 %	5 600 2,5 %	14 000 6,26 %
Summe	111 750 50 %	111 750 50 %	223 500 100 %

Mädchen schneiden besser ab II



Vollständige Vierfeldertafel (mit Anteilen jeweils von 223 500)

	Jungen	Mädchen	Summe
Abschluss	103 350 46,24 %	106 150 47,5 %	209 500 93,74 %
kein Abschluss	8 400 3,76 %	5 600 2,5 %	14 000 6,26 %
Summe	111 750 50 %	111 750 50 %	223 500 100 %

3. Du sitzt im Zug und bekommst Handy-Gespräche von anderen mit:
   a) "Unser Sohn hat die Schule leider ohne Abschluss verlassen."
   Wie hoch ist der Anteil unter den Jungen und unter allen Jugendlichen?
   b) "Unser Kind hat die Schule leider ohne Abschluss verlassen."
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Kind eine Tochter?
   c) "Mein Kind hat gerade einen Schulabschluss geschafft."
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Kind ein Sohn?
   d) "Jungen haben um 50 % schlechter abgeschnitten als die Mädchen."
   "Sie sind gar nicht so schlecht: Nur 0,7 % unter dem Gleichstand mit den Mädchen."
   Mit welchen Zahlen wird jeweils argumentiert? Welche wird jemand wählen, der die Situation dramatisieren will? Welche jemand, der beschwichtigen will?

Lösungen

3. a) Unter den Jungen haben 7,5 % die Schule ohne Abschluss verlassen. Das sind 3,75 % aller Schulabgänger von 2008.
   b) Bedingung: kein Abschluss ($\overline{A}$); gesucht: kein Abschluss und weiblich
   - $P(W|\overline{A}) = \frac{2{,}5\,\%}{2{,}5\,\% + 3{,}75\,\%} \approx 40\,\%$
   - Mit den absoluten Zahlen: $P(W|\overline{A}) = \frac{5600}{5600 + 8400} = 40\,\%$
   - Aus dem Text: Da 60 % der Schulabgänger ohne Abschluss Jungen sind, stellen die weiblichen Schulabgänger ohne Abschluss 40 %.

   c) Bedingung: Schulabschluss (A); gesucht: Abschluss und männlich
   - $P(M|A) = \frac{46{,}25\,\%}{47{,}5\,\% + 46{,}25\,\%} \approx 49{,}3\,\%$
   - Mit den absoluten Zahlen: $P(M|A) = \frac{103\,369}{103\,369 + 106\,163} = 49{,}3\,\%$

   Unter den Schulabgängern mit Abschluss sind 49,3 % männlich.
   d) 8400 Jungen haben keinen Abschluss beim Schulabgang. Das sind 50 % mehr als die 5600 Mädchen.
   Von den Schulabgängern mit Abschluss sind 49,3 % Jungen, also 0,7 % weniger als bei gleicher Geschlechterverteilung. Der Dramatisierer wird den ersten Prozentsatz (50 %) wählen, der Beschwichtiger den zweiten (0,7 %).

Erwerbstätigkeit:

Erwerbstätigkeit I

Neue Daten über die Erwerbstätigkeit in Deutschland
51,1 % der 82,5 Mio. Einwohner Deutschlands sind Frauen. Die Erwerbsquote (Anteil der Personen, die erwerbstätig sind oder aktiv eine Arbeitsstelle suchen) unter Frauen beträgt 42,4 %, unter Männern 55,3 %.

Statistisches Bundesamt, Wiesbaden, 24.06.2004

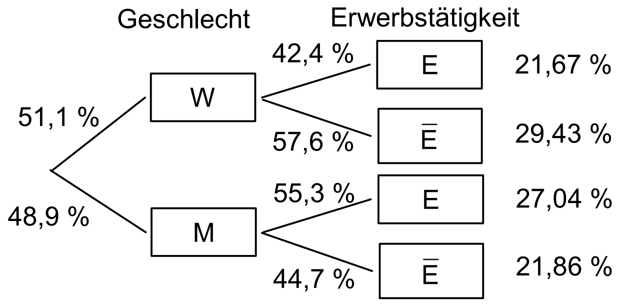
Hinweise: Arbeitslose, die ja eine Stelle suchen, sind als Erwerbstätige mitgezählt.
Bei diesen Zahlen aus dem Jahr 2003 sind auch Personen unter 15 Jahren bzw. über 65 Jahren berücksichtigt, die nicht erwerbstätig sein können.

a) Strukturiere den Sachverhalt durch ein vollständiges Baumdiagramm oder eine Vierfeldertafel (mit Summenrand).

b) Notiere 3 neue Aussagen, die in den Artikel gepasst hätten, direkt aus den in a) berechneten Daten.

LÖSUNGEN ZU ERWERBSTÄTIGKEIT

a)



W: weiblich
M: männlich
E: Erwerbsperson
$\bar{E}$: keine Erwerbsperson

Zur Probe: Je zwei zusammengehörige Astwahrscheinlichkeiten und die 4 Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben zusammen jeweils 100 %.

Vierfeldertafel (mit Summenrand)

	E	$\bar{E}$	Summe
weiblich	21,67 %	29,43 %	51,1 %
männlich	27,04 %	21,86 %	48,9 %
Summe	48,71 %	51,29 %	100 %

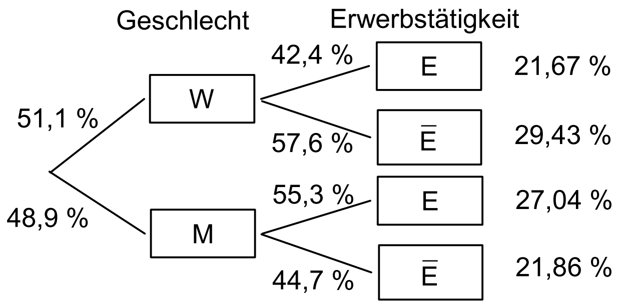
Zur Probe: Die vier Pfadwahrscheinlichkeiten finden sich als die vier Daten der Vierfeldertafel wieder, die beiden Eingangswahrscheinlichkeiten des Baumdiagramms als zwei Summenwerte. Die anderen Daten sind nicht unmittelbar zu finden.

b) Zum Beispiel:

- 48,7 % der gesamten Bevölkerung ist erwerbstätig.
- In der Gesamtbevölkerung gibt es gut $\frac{1}{5}$ (21,7 %) erwerbstätige Frauen.
- Ebenso gibt es gut $\frac{1}{5}$ (21,9 %) nicht erwerbstätige Männer in der Bevölkerung.
- Es gibt – bezogen auf die Gesamtbevölkerung – mehr Nicht-Erwerbstätige (51,3 %) als Erwerbstätige (48,7 %).

Erwerbstätigkeit II

Baumdiagramm



W: weiblich
M: männlich
E: Erwerbsperson
$\bar{E}$: keine Erwerbsperson

Vierfeldertafel (mit Summenrand)

	E	$\bar{E}$	Summe
weiblich	21,67 %	29,43 %	51,1 %
männlich	27,04 %	21,86 %	48,9 %
Summe	48,71 %	51,29 %	100 %

c) Wie groß ist der Anteil der erwerbstätigen Frauen unter den weiblichen Deutschen?

d) Wie groß ist der Anteil der erwerbstätigen Männer unter den männlichen Deutschen?

e) Vergleiche die Ergebnisse in c) und d). Überlege Hintergründe für den Unterschied.

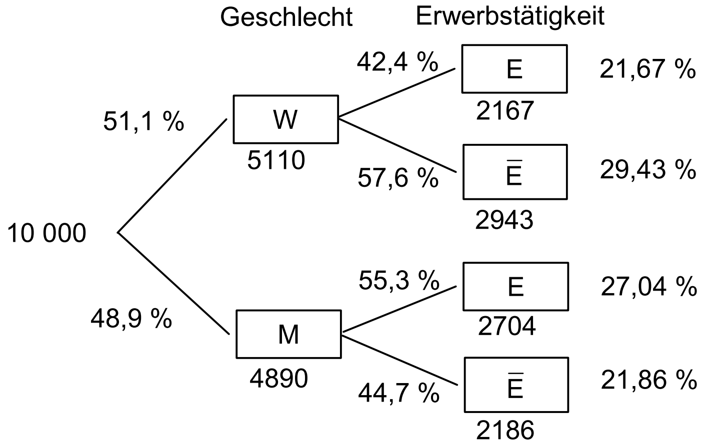
f) Welchen Anteil haben die Frauen unter allen Erwerbstätigen?
Welchen die Männer?

g) Unterscheide noch einmal genau die berechneten Frauenanteile in c) und f).

Lösung

c) $P(E|W) = \frac{21{,}67\ \%}{21{,}67\ \% + 29{,}43\ \%} = \frac{21{,}67\ \%}{51{,}1\ \%} \approx 42{,}4\ \%$

Rund 42,4 % der weiblichen Bevölkerung sind erwerbstätig.
Ist der direkte Zugang über die Wahrscheinlichkeit zu schwer verständlich, kann man gut z. B. 10 000 "Personen" durch das Baumdiagramm "fließen" lassen und absolute Zahlen wie folgt notieren:



Von 10 000 zufällig ausgewählten Personen sind erwartbar 5110 weiblich, davon 2167 erwerbstätig. Der Anteil beträgt $P(E|W) = \frac{2167}{5110} \approx 42{,}4\ \%$, da $\frac{\text{Zahl der günstigen Fälle}}{\text{Zahl der möglichen Fälle}}$ zu rechnen ist. Das Berechnungsverfahren lässt sich auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Bayes übertragen als $\frac{\text{günstige Wahrscheinlichkeit}}{\text{mögliche Wahrscheinlichkeit}}$. Mit dieser übertragenen Merkregel kommen Schüler/innen in der Regel zurecht.

d) $P(E|M) = \frac{27{,}04\ \%}{27{,}04\ \% + 21{,}86\ \%} = \frac{27{,}04\ \%}{48{,}9\ \%} \approx 55{,}3\ \%$

Von der männlichen Bevölkerung sind rund 55,3 % erwerbstätig.

e) Der Anteil der Erwerbstätigen ist in der männlichen Bevölkerung deutlich höher als in der weiblichen – um 12,9 Prozentpunkte.
Häufig übernehmen eher Frauen als Männer die Haushalts- und Familienarbeit, die als nicht erwerbstätig gilt, da damit kein Geld verdient wird.

f) $P(W|E) = \frac{21{,}67\,\%}{21{,}67\,\% + 27{,}04\,\%} = \frac{21{,}67\,\%}{48{,}7\,\%} \approx 44{,}5\,\%$

$P(M|E) = \frac{27{,}04\,\%}{48{,}7\,\%} \approx 55{,}5\,\%$

Unter den Erwerbstätigen machen die Männer 55,5 % aus, die Frauen 44,5 %.

g) In c) wird der Anteil der erwerbstätigen Frauen an der gesamten weiblichen Bevölkerung berechnet, in f) ihr Anteil an der gesamten erwerbstätigen Bevölkerung. Die Bezugsgröße (der Anteil im Nenner) ist verschieden.

Info zu bedingten Wahrscheinlichkeiten
P(E|W) berechnet den Anteil von (E und W $\notin$ erwerbstätig und weiblich) von allen W.
P(W|E) berechnet den Anteil von (E und W) unter allen E.
Statt von dem empirischen Anteil kann man auch von Wahrscheinlichkeit sprechen in folgendem Sinn:
P(E|W): Es wird unter allen weiblichen Personen in der BRD zufällig eine ausgesucht – das ist die Voraussetzung oder auch die Bedingung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese weibliche Person (die auch ein Kind oder eine Greisin sein kann) erwerbstätig ist? – Antwort: 42,4 %.
P(W|E): Es wird unter allen Erwerbspersonen in der BRD eine zufällig ausgewählt. Das ist die Bedingung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es eine Frau ist? – Antwort: 44,5 %.
Man nennt die Wahrscheinlichkeit bedingte Wahrscheinlichkeit und schreibt die Bedingung jeweils hinter einen senkrechten Strich.

Ausländer in Deutschland:

Ausländer in Deutschland I

Ein knapper Zeitungsausschnitt nach Daten des Statistischen Bundesamtes:

Kaum Ausländer in Ostdeutschland

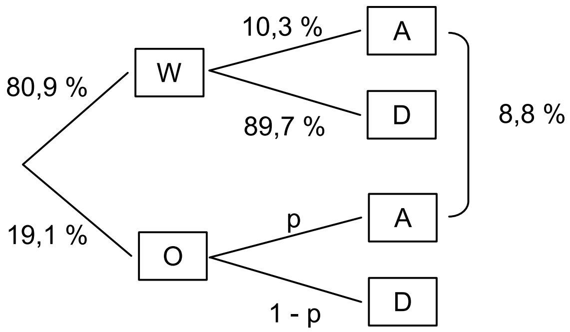
80,9 % der Gesamtbevölkerung Deutschlands lebt in den alten Bundesländern. Während im Westen der Anteil der Ausländer 10,3 % beträgt, liegt er in ganz Deutschland bei 8,8 %.

Stelle die Daten in einem passenden Baumdiagramm oder einer Vierfeldertafel zusammen.
Berechne die fehlenden Werte.

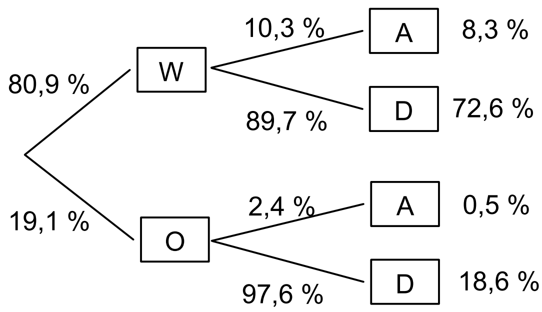
a) W: Westdeutschland O: Ostdeutschland
A: Ausländer D: Deutscher

Baumdiagramm

mit den gegebenen Daten



vollständig



$0{,}809 \cdot 0{,}103 + 0{,}191 \cdot p = 0{,}088 \Rightarrow p = 2{,}4\ \%$

Vierfeldertafel (mit Summenrand)

mit den gegebenen Daten

	W	O	
A	8,3 %*		8,8 %
D			91,2 %
	80,9 %	19,1 %	100 %

vollständig

	W	O	
A	8,3 %	0,5 %	8,8 %
D	72,6 %	18,6 %	91,2 %
	80,9 %	19,1 %	100 %

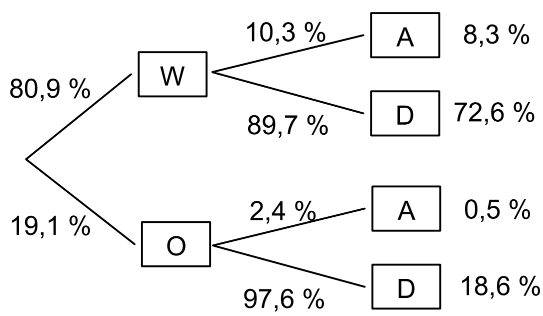
* 80,9 % · 10,3 % ≈ 8,3 %

Ausländer in Deutschland II

W: Westdeutschland O: Ostdeutschland
A: Ausländer D: Deutscher

Baumdiagramm

vollständig



Vierfeldertafel (mit Summenrand)

	W	O	
A	8,3 %	0,5 %	8,8 %
D	72,6 %	18,6 %	91,2 %
	80,9 %	19,1 %	100 %

b) Greift man zufällig einen Menschen aus Deutschland heraus, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er ein
- Ausländer?
- Deutscher aus dem Osten?
- Deutscher?
- Ausländer in Westdeutschland?

c)
- Man wählt mit einem Zufallsgerät einen Wessie aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er Ausländer?
- Wie lautet die Antwort für Ostdeutschland?
- Um welchen Faktor ist die Wahrscheinlichkeit in Westdeutschland höher als in Ostdeutschland, einen Ausländer auszuwählen?

d) Der Anteil der in Westdeutschland lebenden Ausländer an der BRD-Bevölkerung ist aber doch $\frac{8{,}3\,\%}{0{,}5\,\%}$ = 16,6-mal so hoch wie in Ostdeutschland. Wie passt das zum Ergebnis in c)?

e) Ein ausländischer Mitbürger wird zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lebt er in
- Westdeutschland?
- Ostdeutschland?

Beantworte die entsprechende Frage für einen Deutschen.

LÖSUNGEN ZU AUSLÄNDER IN DEUTSCHLAND II

b) P(A) = 8,8 % – Die Information war gegeben.
P(O und D) = 18,6 %
P(D) = 72,6 % + 18,6 % = 91,2 %
P(W und A) = 8,3 %

Die Daten sind der Vierfeldertafel direkt, dem Baumdiagramm direkt oder durch Summenbildung zu entnehmen.

c) P(A|W) = 10,3 %
P(A|O) = 2,4 %
$\frac{10{,}3\,\%}{2{,}4\,\%} \approx 4{,}3$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Ausländer zu wählen, ist in Westdeutschland mehr als viermal so hoch wie in Ostdeutschland.

Die Daten sind dem Baumdiagramm direkt zu entnehmen; der Vierfeldertafel erst durch den Quotienten: $P(A|W) = \frac{P(A \text{ und } W)}{P(\text{Summe } W)} = \frac{8{,}3\,\%}{80{,}9\,\%} \approx 10{,}3\,\%$. Entsprechend

$P(A|O) = \frac{0{,}5\,\%}{19{,}1\,\%} \approx 2{,}6\,\%$ mit rundungsbedingter Abweichung zu 2,4 %.

d) In Westdeutschland leben rund 4-mal so viele Menschen wie in Ostdeutschland (80,9 %:19,1 % ≈ 4:1) und etwa 4-mal so viele Ausländer. Also leben auch entsprechend mehr Ausländer dort, rund 4 · 4 = 16-fach so viele.

Genauer gerechnet: $\frac{8,33\,\%}{0,46\,\%} \approx \frac{80,9\,\% \cdot 10,3\,\%}{19,1\,\% \cdot 2,4\,\%} \approx 4,2 \cdot 4,3 \approx 18,1.$

Das BRD-weite Verhältnis entsteht aus der Multiplikation des West-/Ost-Ausländer-Verhältnisses und des West-/Ost-Bevölkerungs-Verhältnisses.

e) $P(W|A) = \frac{P(\text{W und A})}{P(\text{Summe A})} = \frac{8,3\,\%}{8,3\,\% + 0,5\,\%} = \frac{8,3\,\%}{8,8\,\%} \approx 94,3\,\%$ (genauer: 94,8 %)

$P(O|A) = \frac{P(\text{O und A})}{P(\text{Summe A})} = \frac{0,5\,\%}{0,5\,\% + 8,3\,\%} = \frac{0,5\,\%}{8,8\,\%} \approx 5,7\,\%$ (genauer: 5,2 %)

$P(O|D) = \frac{P(\text{O und D})}{P(\text{Summe D})} = \frac{18,6\,\%}{18,6\,\% + 72,6\,\%} = \frac{18,6\,\%}{91,2\,\%} \approx 20,4\,\%$

$P(W|D) = \frac{P(\text{W und D})}{P(\text{Summe D})} = \frac{72,6\,\%}{91,2\,\%} \approx 79,6\,\%$

Es ergeben sich in beiden Fällen nicht genau dieselben Verhältnisse wie für die Gesamtbevölkerung; z. B. $\frac{P(W)}{P(O)} = \frac{80,9\,\%}{19,1\,\%} \neq \frac{P(W\,|\,D)}{P(O\,|\,D)} = \frac{79,6\,\%}{20,4\,\%}$, weil die Verteilung der Ausländer auf West- und Ostdeutschland prozentual stark verschieden ist.

4. Aktuelles

- Statistisches Bundesamt:
  Rückgang des BIP 2009: Datenbeschaffung; Preisbereinigung; Indexzahlen – Mut im Umgang mit Wirtschaftsdaten!
  Statistischer Überhang: Bereitschaft zur Nachforschung, Interesse an mathematischer Aufklärung
  (ohne Material, da an ihm noch gearbeitet wird)